

**Федеральное государственное образовательное
бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ
ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)**

**Департамент анализа данных и машинного обучения
Факультета информационных технологий и анализа больших данных**

Рябов П. Е.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Рабочая программа дисциплины

для студентов, обучающихся по направлению подготовки
38.03.05 - Бизнес-информатика,
ОП «Цифровая трансформация управления бизнесом»
(ИТ-менеджмент в бизнесе; Технологии цифровых бизнес-моделей)

Москва 2021

**Федеральное государственное образовательное
бюджетное учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ
ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)**

**Департамент анализа данных и машинного обучения
Факультета информационных технологий и анализа больших данных**

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной и
методической работе

_____ Е.А. Каменева

29.12.2021 г.

Рябов П. Е.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Рабочая программа дисциплины

для студентов, обучающихся по направлению подготовки

38.03.05 - Бизнес-информатика,

ОП «Цифровая трансформация управления бизнесом»

(ИТ-менеджмент в бизнесе; Технологии цифровых бизнес-моделей)

Рекомендовано Ученым советом

*Факультета информационных технологий и анализа больших данных
(протокол № 15 от 22.12. 2021 г.)*

Одобрено Советом учебно-научного

*Департамента анализа данных и машинного обучения
(протокол № 5 от 21.12. 2021 г.)*

Москва 2021

УДК 519.2(073)
ББК 22.17
Р 98

Рецензент: *Рамоданов С. М., доктор физико-математических наук, профессор Департамента анализа данных и машинного обучения*

Р98 **Рябов П. Е.,** доктор физико-математических наук, профессор Департамента анализа данных и машинного обучения

Теория вероятностей и математическая статистика. Рабочая программа дисциплины для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.05 - Бизнес-информатика, ОП «Цифровая трансформация управления бизнесом» (ИТ-менеджмент в бизнесе; Технологии цифровых бизнес-моделей). – М.: Финуниверситет, Департамент анализа данных и машинного обучения, 2022. –35 с.

Дисциплина «*Теория вероятностей и математическая статистика*» относится к Циклу математики и информатики направления подготовки 38.03.05 - *Бизнес-информатика, ОП «Цифровая трансформация управления бизнесом», (ИТ-менеджмент в бизнесе; Технологии цифровых бизнес-моделей).*

В рабочей программе дисциплины определены ее цель, место в структуре ОП, требования к результатам освоения дисциплины, содержание программы, тематика практических занятий, формы самостоятельной работы, оценочные средства для текущего контроля и промежуточной аттестации, учебно-методическое и информационное обеспечение.

Учебное издание

Рябов Павел Евгеньевич

Теория вероятностей и математическая статистика

Рабочая программа дисциплины

Компьютерный набор и верстка П. Е. Рябов
Формат 60×90/16. Гарнитура Times New Roman
Усл.п.л. 2,3. Изд. № - 2022. Тираж экз.

Заказ № _____
Отпечатано в Финансовом университете

© Рябов П. Е., 2022

© Финансовый университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Наименование дисциплины	5
2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине	5
3. Место дисциплины в структуре образовательной программы	7
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся	7
5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий.....	8
5.1. Содержание дисциплины.....	8
5.2. Учебно-тематический план.....	13
5.3. Содержание семинаров, практических занятий.....	14
6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине.....	18
6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы.....	18
6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю	20
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.....	24
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	33
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.	34
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	35
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем	35
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.....	36

1. Наименование дисциплины

«Теория вероятностей и математическая статистика».

2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» обеспечивает формирование следующих компетенций: УК-4, УК-10

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции ¹	Результаты обучения (владения ² , умения и знания), соотнесенные с компетенциями/индикаторами достижения компетенции
УК-4	Способность использовать прикладное программное обеспечение при решении профессиональных задач	1.Использует основные методы и средства получения, представления, хранения и обработки данных. 2.Демонстрирует владение профессиональными пакетами прикладных программ. 3.Выбирает необходимое прикладное программное обеспечение в зависимости от решаемой задачи. 4.Использует прикладное программное обеспечение для	Знать основы теории вероятностей и математической статистики для получения, представления, хранения и обработки данных Уметь использовать методы и средства получения, представления, хранения и обработки данных. Знать основные профессиональные пакеты прикладных программ для статистической обработки данных. Уметь использовать профессиональные пакеты прикладных программ для статистической обработки данных. Знать необходимое прикладное программное обеспечение в зависимости от решаемой задачи. Уметь использовать прикладное программное обеспечение в зависимости от решаемой задачи. Знать прикладное программное обеспечение для решения конкретных прикладных задач статистики.

¹ Заполняется при реализации актуализированных ОС ВО ФУ и ФГОС ВО3++

² Владения формулируются только при реализации ОС ВО ФУ первого поколения и ФГОС ВО 3+

		решения конкретных прикладных задач.	Уметь использовать прикладное программное обеспечение для решения конкретных прикладных задач статистики.
УК-10	Способность осуществлять поиск, критически анализировать, обобщать и систематизировать информацию, использовать системный подход для решения поставленных задач	1. Четко описывает состав и структуру требуемых данных и информации, грамотно реализует процессы их сбора, обработки и интерпретации 2. Обосновывает сущность происходящего, выявляет закономерности, понимает природу вариабельности 3. Формулирует признак классификации, выделяет соответствующие ему группы однородных «объектов», идентифицирует общие свойства элементов этих групп, оценивает полноту результатов классификации, показывает прикладное назначение классификационных групп. 4. Грамотно, логично, аргументировано формирует собственные суждения и оценки. Отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок и т.д. в рассуждениях других участников деятельности.	Знать основы теории вероятностей и математической статистики для описания состава и структуры требуемых данных и информации. Уметь использовать инструменты описательной статистики и визуализации данных. Знать основы теории вероятностей и математической статистики для обоснования происходящего, выявлять статистические закономерности для понимания природы вариабельности. Уметь выявлять статистические закономерности. Знать основные критерии однородности и классификации групп. Уметь использовать статистические критерии для проверки однородности признаков. Знать основные положения статистической обработки данных, их репрезентативность. Уметь использовать инструменты описательной статистики и визуализации данных.

		5. Аргументированно и логично представляет свою точку зрения посредством и на основе системного описания.	Знать основы теории вероятностей и математической статистики для аргументации постановки статистических задач и дальнейшего их системного описания. Уметь использовать статистические методы для аргументации своей точки зрения
--	--	---	---

3. Место дисциплины в структуре образовательных программ

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к Циклу математики и информатики по направлению подготовки 38.03.05 - *Бизнес-информатика*, ОП «Цифровая трансформация управления бизнесом», (ИТ-менеджмент в бизнесе; Технологии цифровых бизнес-моделей).

Изучение дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» базируется на знаниях, полученных в рамках изучения дисциплин, входящих в ОП бакалавра по направлению 38.03.05 – «Бизнес-информатика»: Математика, Математические методы принятия решений, Программирование в среде R, Алгоритмы и структуры данных в языке Python.

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

Очная форма обучения, 2021 г.

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 2 (в часах)	Семестр 3 (в часах)
Общая трудоемкость дисциплины	8/288	180	108
Контактная работа - Аудиторные занятия	100	50	50
<i>Лекции</i>	32	16	16
<i>Семинары, практические занятия</i>	68	34	34
Самостоятельная работа	188	130	58
Вид текущего контроля	Контрольные работы	Контрольная работа	Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации	Экзамен, экзамен	Экзамен	Экзамен

5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

5.1. Содержание дисциплины

Теория вероятностей

Раздел 1. Вероятности событий

Операции над случайными событиями, связанными с опытом. Геометрические вероятности. Статистическое «определение» вероятности и аксиоматика А. Н. Колмогорова. Вероятностное пространство как модель случайного эксперимента. Конечное вероятностное пространство и классический способ подсчета вероятностей. Дискретное вероятностное пространство.

Условные вероятности. Независимые события и правило умножения вероятностей. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Априорные и апостериорные вероятности гипотез.

Схема повторных независимых испытаний (схема Бернулли). Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли. Приближенные формулы Лапласа и Пуассона. Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности.

Раздел 2. Случайные величины

Случайная величина как функция на пространстве элементарных событий. Функция распределения случайной величины. Свойства функции распределения. Независимость случайных величин. Функции от одной или нескольких случайных величин. Арифметические операции над случайными величинами.

Дискретная случайная величина (ДСВ) и ее закон распределения. Основные числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение, ковариация и коэффициент корреляции. Математическое ожидание функции от ДСВ. Неравенство Йенсена.

Свойства математического ожидания, дисперсии, ковариации и коэффициента корреляции.

Примеры классических дискретных распределений (биномиальное, пуассоновское, геометрическое) и вычисление их числовых характеристик. Гипергеометрический закон распределения. Полиномиальное распределение. Пуассоновость суммы независимых пуассоновских случайных величин. Биномиальная модель ценообразования финансовых инструментов. Реализация моделей дискретных случайных величин в пакетах R, *Jupyter Notebook*.

Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины. Свойства функции плотности. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины. Математическое ожидание функции от абсолютно непрерывной случайной величины.

Равномерное распределение на отрезке, треугольное распределение (распределение Симпсона), показательное (экспоненциальное) распределение, распределение Коши, нормальное и логнормальное распределения, их числовые характеристики. Нормальность суммы независимых нормальных случайных величин. Реализация моделей непрерывных случайных величин в пакетах R, *Jupyter Notebook*.

Начальные и центральные моменты случайной величины. Асимметрия и эксцесс. Мода, медиана и квантили непрерывного распределения.

Раздел 3. Случайные векторы

Совместное распределение случайных величин. Случайный вектор. Зависимые и независимые случайные векторы. Функция распределения случайного вектора и ее свойства. Одинаково распределенные случайные векторы.

Дискретные случайные векторы. Вероятность попадания дискретного случайного вектора в заданное множество. Закон распределения двумерного дискретного случайного вектора и его связь с распределениями компонент. Реализация моделей дискретных случайных векторов в пакетах R, *Jupyter Notebook*.

Абсолютно непрерывные случайные векторы. Вероятность попадания абсолютно непрерывного случайного вектора в заданное множество. Связь функции

плотности распределения случайного вектора с функциями плотности его компонент. Функция плотности и независимость компонент случайного вектора. Равномерное распределение в ограниченной области в $\mathbb{R}^n$.

Числовые характеристики дискретных и абсолютно непрерывных случайных векторов. Математическое ожидание функции от компонент случайного вектора. Ковариационная матрица случайного вектора. Неотрицательная определенность ковариационной матрицы.

Нормальное распределение в $\mathbb{R}^2$. Плотность двумерного нормального распределения, приведение к каноническому виду. Нормальные случайные векторы и их свойства. Реализация моделей непрерывных случайных векторов в пакетах R, *Jupyter Notebook*.

Условные распределения и условные плотности. Условное математическое ожидание и его свойства. Формула полного математического ожидания. Условная дисперсия. Формула полной дисперсии. Условная ковариация случайных величин X и Y относительно случайной величины Z . Формула полной ковариации.

Раздел 4. Предельные теоремы теории вероятностей

Неравенство Маркова и Чебышева. Правило «трех сигм» в общем случае. Теоремы Чебышёва и Бернулли. Последовательности случайных величин. Сходимость по вероятности и закон больших чисел. Реализация модели ЗБЧ в пакетах R, *Jupyter Notebook*.

Центральная предельная теорема (ЦПТ) в форме Ляпунова для одинаково распределенных слагаемых и в общем случае. Применение ЦПТ. Неравенство Берри – Эссеена об оценке погрешности приближения в центральной предельной теореме. Реализация модели ЦПТ в пакетах R, *Jupyter Notebook*.

Раздел 5. Цепи Маркова

Определение и способы задания цепей Маркова. Вероятности и матрица переходов. Многошаговые вероятности переходов и теорема о матрице многошаговых переходов. Предельные вероятности. Теорема Маркова о предельных вероятностях.

Математическая статистика

Раздел 1. Статистика конечной совокупности

Эмпирические характеристики признака: среднее, дисперсия, СКО, асимметрия, эксцесс, функция распределения. Эмпирическая ковариация двух признаков. Вариационный ряд, размах и эмпирическая медиана. Среднее арифметическое и дисперсия совокупности, разбитой на группы. Среднее арифметическое и дисперсия интервального распределения. Связь с характеристиками исходной совокупности. Поправка Шеппарда.

Генеральная совокупность, выборка и основные способы организации выборки. Основные выборочные характеристики и их свойства. Повторные и бесповторные выборки. Математическое ожидание и дисперсия выборочного среднего. Ковариация выборочных средних двух признаков. Математическое ожидание и дисперсия выборочной доли.

Раздел 2. Точечные оценки параметров распределений

Выборка из распределения. Вариационный ряд и порядковые статистики. Распределение порядковых статистик. Статистическое оценивание параметров. Точечные оценки и их свойства (несмещенность, состоятельность и эффективность). Состоятельность и сходимость по вероятности. Несмещенная оценка начального момента произвольного порядка. Выборочное среднее как эффективная оценка математического ожидания. Достаточные условия состоятельности статистической оценки. Состоятельные оценки начальных моментов. Несмещенная оценка S^2 генеральной дисперсии и ее состоятельность.

Оценки параметров распределения методом моментов и их состоятельность. Метод максимального правдоподобия. Выборочное среднее как эффективная оценка математического ожидания нормального распределения в классе всех несмещенных оценок.

Раздел 3. Интервальные статистические оценки

Интервальные оценки и доверительные области. Байесовское статистическое оценивание. Интервальные оценки параметров распределения, доверительная вероятность и точность оценки. Построения интервальных оценок методом

центральной статистики. Законы распределения выборочных характеристик в нормальной генеральной совокупности. Распределения χ^2 . Стьюдента и Фишера. Определения и простейшие свойства. Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии. Доверительные интервалы для математического ожидания и вероятности события в случае выборки большого объема. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии. Доверительный интервал (симметричный по вероятности) для дисперсии при известном математическом ожидании. Доверительный интервал (симметричный по вероятности) для дисперсии при неизвестном математическом ожидании. Интервал предсказания.

Раздел 4. Статистическая проверка гипотез

Статистическая проверка гипотез: основные типы гипотез и общая логическая схема статистического критерия; характеристики качества критерия. Проверка статистических гипотез. Критическая область. Мощность критерия. Отношение правдоподобия и лемма Неймана-Пирсона. Пример построения наиболее мощного критерия. Проверка гипотез об определенных значениях параметров нормальных распределений. Проверка гипотезы о равенстве средних при известной дисперсии. Проверка гипотезы о равенстве средних при неизвестной дисперсии. *P*-значение критерия. Определение и способ его вычисления. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий. Критерии Бартлетта и Кокрена. Критерии согласия. Проверка гипотезы о соответствии эмпирических данных теоретическому закону с данной функцией распределения по критерию Пирсона. Проверка гипотезы об однородности нескольких выборок по критериям Пирсона и Колмогорова – Смирнова. Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа. Реализация моделей проверки статистических гипотез в пакетах R, *Jupyter Notebook*.

Раздел 5. Основы статистического исследования зависимостей

Решение СЛУ методом наименьших квадратов. Общая дисперсия как сумма факторной и остаточной дисперсии. Коэффициент детерминации R^2 и его связь с коэффициентом корреляции. Линейная модель парной регрессии и теорема Гаусса – Маркова. Несмещенность МНК-оценок коэффициентов парной регрессии. Дисперсия МНК-оценок коэффициентов парной регрессии.

5.2. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование тем (разделов) дисциплины	Трудоёмкость в часах					Формы текущего контроля успеваемости
		Всего	Контактная работа - Аудиторная работа			Самостоятельная работа	
			Общая, в т. ч.:	Лекции	Семинары, практические занятия		
Теория вероятностей							
1.	Вероятности событий	36	12	4	8	24	Выступления у доски, домашние задания, собеседование по материалу и обсуждение результатов
2.	Случайные величины	50	14	4	10	36	
3.	Случайные векторы	50	14	4	10	36	
4.	Предельные теоремы теории вероятностей	30	6	2	4	24	
5.	Цепи Маркова	14	4	2	2	10	
Математическая статистика							
1.	Статистика конечной совокупности	18	8	2	6	10	Выступления у доски, домашние задания, собеседование по материалу и обсуждение результатов
2.	Точечные оценки параметров распределений	16	8	2	6	8	
3.	Интервальные статистические оценки	22	10	4	6	12	
4.	Статистическая проверка гипотез	42	18	6	12	24	
5.	Основы статистического исследования зависимостей	10	6	2	4	4	

	В целом по дисциплине	288	100	32	68	188	Согласно учебному плану: контрольные работы
	Итого в %	100	35	32	68	65	

5.3. Содержание семинаров, практических занятий

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарских, практических занятиях, рекомендуемые источники из разделов 8,9 (указывается раздел и порядковый номер источника)	Формы проведения занятий
Теория вероятностей		
Раздел 1. Вероятности событий	Операции над случайными событиями, связанными с опытом. Геометрические вероятности. Статистическое «определение» вероятности и аксиоматика А.Н. Колмогорова. Вероятностное пространство как модель случайного эксперимента. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 1. Вероятности событий	Условные вероятности. Независимые события и правило умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса вероятностей гипотез. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 1. Вероятности событий	Независимые испытания. Схема Бернулли. Вероятность заданного числа успехов и наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли. [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 1. Вероятности событий	Локальная и интегральная приближенные формулы Лапласа. Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности. Приближенные формулы Пуассона. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 2. Случайные величины	Дискретная случайная величина и ее закон распределения. Примеры дискретных законов распределения: биномиальный, геометрический, гипергеометрический, полиномиальный, пуассоновский. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 2. Случайные величины	Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Свойства математического ожидания и дисперсии произвольной случайной величины. Стандартное и среднее линейное отклонения. Ковариация и коэффициент корреляции. Числовые характеристики типичных дискретных законов Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.

Раздел 2. Случайные величины	Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность вероятности и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины. Равномерное распределение на отрезке и показательное распределение на полупрямой. Медиана и квантили непрерывного распределения. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 2. Случайные величины	Центральные и начальные моменты вероятностного распределения. Асимметрия и эксцесс. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 2. Случайные величины	Нормальное распределение на прямой. Свойства нормальных случайных величин. Логарифмически нормальное распределение. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 3. Случайные векторы	Зависимые и независимые случайные векторы. Функция распределения случайного вектора и ее свойства. Одинаково распределенные случайные векторы. Дискретные случайные векторы. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 3. Случайные векторы	Абсолютно непрерывные случайные векторы. Связь функции плотности распределения случайного вектора с функциями плотности его компонент. Равномерное распределение в ограниченной области. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 3. Случайные векторы	Условные распределения и условные плотности. Условное математическое ожидание и его свойства. Формула полного математического ожидания. Условная дисперсия. Формула полной дисперсии. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 3. Случайные векторы	Многомерное нормальное распределение. Приведение к каноническому виду. Нормальные случайные векторы и их свойства. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 3. Случайные векторы	Многомерное условное нормальное распределение. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 4. Предельные теоремы теории вероятностей	Неравенства Маркова и Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.

Раздел 4. Предельные теоремы теории вероятностей	Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 5. Цепи Маркова	Определение и способы задания цепей Маркова. Вероятности и матрица переходов. Многошаговые вероятности переходов и теорема о матрице многошаговых переходов. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Математическая статистика		
Раздел 1. Статистика конечной совокупности	Эмпирические характеристики признака: среднее, дисперсия, СКО, асимметрия, эксцесс, функция распределения. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 1. Статистика конечной совокупности	Эмпирическая ковариация двух признаков. Вариационный ряд, размах и эмпирическая медиана. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 1. Статистика конечной совокупности	Среднее арифметическое и дисперсия совокупности, разбитой на группы. Среднее арифметическое и дисперсия интервального распределения. Связь с характеристиками исходной совокупности. Поправка Шепарда. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 1. Статистика конечной совокупности	Генеральная совокупность, выборка и основные способы организации выборки. Основные выборочные характеристики и их свойства. Повторные и бесповторные выборки. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 2. Точечные оценки параметров распределений	Выборка из распределения. Вариационный ряд и порядковые статистики. Распределение порядковых статистик. Статистическое оценивание параметров. Точечные оценки и их свойства (несмещенность, состоятельность и эффективность). Асимптотическая нормальность. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 2. Точечные оценки параметров распределений	Состоятельность и сходимости по вероятности. Несмещенная оценка начального момента произвольного порядка. Выборочное среднее как эффективная оценка математического ожидания. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.

Раздел 2. Точечные оценки параметров распределений	Состоятельные оценки начальных моментов. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 2. Точечные оценки параметров распределений	Метод максимального правдоподобия и метод моментов. Оценки параметров распределения методом моментов и их состоятельность. Метод максимального правдоподобия. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 2. Точечные оценки параметров распределений	Оценки параметров распределения методом моментов и их состоятельность. Метод максимального правдоподобия. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	
Раздел 2. Точечные оценки параметров распределений	Неравенство Рао – Крамера и информация Фишера. Эффективные по Рао – Крамера оценки. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 3. Интервальные статистические оценки	Интервальные оценки параметров распределения, доверительная вероятность и точность оценки. Построения интервальных оценок методом центральной статистики. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 3. Интервальные статистические оценки	Распределения хи-квадрат Стьюдента и Фишера. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2, 9.4]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 3. Интервальные статистические оценки	Интервальные оценки и доверительные области. Байесовское статистическое оценивание. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 4. Статистическая проверка гипотез	Статистические критерии. Статистическая проверка гипотез: основные типы гипотез и общая логическая схема статистического критерия; характеристики качества критерия. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 4. Статистическая проверка гипотез	Проверка гипотез об определенных значениях параметров нормальных распределений. Проверка гипотезы о равенстве средних при известной дисперсии. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.

Раздел 4. Статистическая проверка гипотез	про-	Проверка гипотезы о равенстве средних при неизвестной дисперсии. Р-значение критерия. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.2, 9.3, 9.4]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 4. Статистическая проверка гипотез	про-	Проверка гипотез о виде распределения. Критерий Пирсона. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2, 9.4]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 4. Статистическая проверка гипотез	про-	Проверка гипотезы об однородности нескольких выборок по критериям Пирсона и Колмогорова – Смирнова. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 4. Статистическая проверка гипотез	про-	Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2, 9.4]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 5. Основы статистического исследования зависимостей		Решение СЛУ методом наименьших квадратов. Общая дисперсия как сумма факторной и остаточной дисперсии. Коэффициент детерминации R^2 и его связь с коэффициентом корреляции. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.2]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.
Раздел 5. Основы статистического исследования зависимостей		Линейная модель парной регрессии и теорема Гаусса – Маркова. Несмещенность МНК- оценок коэффициентов парной регрессии. Дисперсия МНК-оценок коэффициентов парной регрессии. Рекомендуемые источники: [8.1. - 8.5.; 9.1, 9.3]	Контроль наличия и выборочная проверка домашнего задания.

6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
Теория вероятностей		
Раздел 1. Вероятности событий (теория вероятности)	Статистическое моделирование вероятности	Программирование различных вероятностных моделей с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «R»

Раздел 2. Случайные величины (теория вероятности)	Статистическое моделирование различных распределений случайных величин	Моделирование различных распределений с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «R»
Раздел 3. Случайные векторы (теория вероятности)	Статистическое моделирование двумерного нормального закона распределения.	Моделирование различных многомерных распределений с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «R»
Раздел 4. Предельные теоремы теории вероятностей	Статистическое моделирование закона больших чисел и центральной предельной теоремы.	Реализация модели ЦПТ в пакетах R, Jupyter Notebook.
Раздел 5. Цепи Маркова	Предельные вероятности. Теорема Маркова о предельных вероятностях.	Моделирование дискретных цепей Маркова с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «R»
Математическая статистика		
Раздел 1. Статистика конечной совокупности	Среднее арифметическое и дисперсия интервального распределения. Связь с характеристиками исходной совокупности. Поправка Шеппарда.	Эмпирические характеристики признака с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «Wolfram Mathematica»
Раздел 2. Точечные оценки параметров распределений (математическая статистика)	Метод максимального правдоподобия и метод моментов. Оценки параметров распределения методом моментов и их состоятельность.	Численные методы нахождения оценок параметров, используемые методами максимального правдоподобия и метод моментов с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «R». Метод спейсингов.
Раздел 3. Интервальные статистические оценки	Приближенные (асимптотические) доверительные интервалы. Доверительные интервалы для математического ожидания и вероятности события в случае выборки большого объема. Интервал предсказания.	Численные методы нахождения оценок параметров, используемые методами максимального правдоподобия и метод моментов с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «R».
Раздел 4. Статистическая проверка гипотез (математическая статистика)	Проверка гипотезы об однородности нескольких выборок по критериям Пирсона и Колмогорова – Смирнова.	Реализация проверки гипотезы об однородности в пакете «Jupyter Notebook» и «R».
Раздел 5. Основы статистического исследования зависимостей (математическая статистика)	Решение СЛУ методом наименьших квадратов. Общая дисперсия как сумма факторной и остаточной дисперсии. Коэффициент детерминации R^2 и его связь с коэффициентом корреляции.	Численные методы решения СЛУ методом наименьших квадратов с использованием инструментария «Jupyter Notebook» и «R».

6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примерный перечень вопросов к контрольным работам

1. Сформулируйте аксиомы теории вероятностей и на их основе докажите свойство непрерывности вероятности.
2. Дайте определение понятий «независимость событий». Какие события называются «независимыми в совокупности». Следует ли из равенства $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ попарная независимость. Ответ обосновать.
3. Дайте определение понятий «условная вероятность», «полная группа попарно несовместных событий». Сформулируйте и докажите теоремы, утверждающие справедливость формулы полной вероятностей и формулы полной вероятностей для математического ожидания.
4. Дайте определение схемы Бернулли. Выведите формулу для определения вероятности $P_n(k)$ наступления k успехов в серии из n независимых испытаний.
5. Дайте определение биномиального закона распределения. Выведите формулу для наиболее вероятного числа успехов в схеме Бернулли из n независимых испытаний. Приведите формулу полиномиального распределения.
6. Сформулируйте и докажите предельную теорему Пуассона. Выведите формулу для наиболее вероятного значения распределения Пуассона.
7. Сформулируйте понятие случайной величины и функции распределения случайной величины. Привести пример вероятностного пространства и функции на нём, которая не является случайной величиной.
8. Дайте определение функции распределения случайной величины и докажите основные свойства функции распределения. Найдите функцию распределения индикатора события.
9. Сформулируйте определение дискретной случайной величины. Выведите выражение для функции распределения дискретной случайной величины.
10. Дайте определение независимости в совокупности дискретных случайных величин. Пусть I_A, I_B, I_C — индикаторы трёх независимых событий. Показать, что I_A, I_B, I_C — независимые случайные величины.
11. Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины. Может ли целочисленная случайная величина иметь математическое ожидание, равное π ? Ответ обосновать.

12. Сформулируйте и докажите теорему сложения для математических ожиданий.
13. Сформулируйте и докажите теорему умножения для математических ожиданий.
14. Сформулируйте и докажите неравенство Маркова.
15. Сформулируйте и докажите неравенство Чебышёва.
16. Сформулируйте определение производящей функции целочисленной неотрицательной случайной величины. Найдите производящие функции основных дискретных распределений.
17. Сформулируйте определение производящей функции целочисленной неотрицательной случайной величины. С помощью производящей функции докажите пуассоновость суммы независимых случайных величин, распределённых по закону Пуассона.
18. Дайте определение и сформулируйте основные свойства дисперсии дискретной случайной величины. Докажите одностороннее неравенство Чебышёва.
19. Сформулируйте и докажите теорему сложения для дисперсии суммы независимых случайных величин. Выведите формулу для дисперсии произведения двух независимых случайных величин?
20. Сформулируйте определение ковариации случайных величин и докажите основные свойства ковариации.
21. Сформулируйте определение коэффициента корреляции случайных величин и докажите основные свойства коэффициента корреляции.
22. Дайте определение некоррелированности случайных величин. Следует ли из некоррелированности независимость случайных величин? Ответ обосновать.
23. Дайте определения асимметрии и эксцесса распределения. Найдите асимметрию и эксцесс равномерного распределения на отрезке $[a; b]$.
24. Выведите формулы для математического ожидания и дисперсии случайной величины, распределённой по нормальному закону с параметрами m и σ^2 .
25. Сформулируйте определение производящей функции моментов. С помощью производящей функции моментов докажите нормальность суммы независимых случайных величин, распределённых по нормальному закону.
26. Сформулировать и доказать закон больших чисел в форме Чебышёва и Бернулли.
27. Сформулировать и доказать утверждение, известное как «общее правило 3σ ».

28. Сформулировать центральную предельную теорему и неравенство Берри – Эссеена об оценке погрешности приближения в центральной предельной теореме.
29. Сформулировать и доказать предельную теорему Муавра – Лапласа.
30. Дайте определение распределения Коши и докажите основные свойства случайной величины, которая имеет распределение Коши с параметрами a и b .
31. Дайте определение логнормального закона распределения с параметрами m и σ^2 . Приведите формулы с доказательством для математического ожидания и дисперсии случайной величины, которая имеет логнормальное распределение с параметрами m и σ^2 .
32. Перечислите основные свойства функции плотности распределения двумерного случайного вектора. Каким образом связаны функции плотности и распределения? Укажите функцию плотности для равномерного распределения в области $G \subset R$.
33. Дайте определение плотности двумерного нормального закона распределения на плоскости. Докажите теорему об эквивалентности независимости и некоррелированности компонент X и Y двумерного нормального вектора (X, Y) .
34. Сформулируйте и докажите теорему об условной плотности двумерного нормального закона распределения.
35. Пусть (X, Y) – двумерный нормальный случайный вектор. Докажите, что из равенства $Cov(X, Y) = 0$ вытекает независимость X и Y .
36. Сформулируйте определение условного математического ожидания случайной величины X относительно случайной величины Y . Докажите формулу полного математического ожидания $E(X) = E[E(X|Y)]$.
37. Сформулируйте определение условной дисперсии случайной величины X относительно случайной величины Y . Докажите формулу полной дисперсии $Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)]$.
38. Сформулируйте определение условной ковариации случайных величин X и Y относительно случайной величины Z . Докажите формулу полной ковариации $Cov(X, Y) = E[Cov(X, Y|Z)] + Cov[E(X|Z), E(Y|Z)]$.

Примеры заданий контрольных работ

1. Случайный вектор (X, Y) распределен по закону $P(X = 1, Y = 1) = 0,11$; $P(X = 1, Y = 2) = 0,19$; $P(X = 1, Y = 3) = 0,19$; $P(X = 2, Y = 1) = 0,17$; $P(X = 2, Y = 2) = 0,1$; $P(X = 2, Y = 3) = 0,24$. Найдите условную вероятность $P(X = 2 | Y = 2)$.
2. Найдите распределение случайной величины $Z = \max(5, X - Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y) :

	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$
$Y = -2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
$Y = -1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

3. Дано: $P(X = 40) = 0,4$, $P(X = 60) = 0,6$, $E(Y | X = 40) = 4$, $E(Y | X = 60) = 1$. Найдите $Cov(X, Y)$.
4. Случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}x + Cy, & \text{если } 0 < x < 2, 0 < y < 3, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу C и $P(X + Y > 1)$.

5. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{5}{2}x^2 - 3xy - 6x - y^2 - 4y - 4}.$$

Найдите $Var(Y | X = x)$.

6. Случайные величины X и Y нормально распределены $N(0; \sigma^2)$ и независимы. Доказать, что отношение $Z = \frac{X}{Y}$ имеет распределение Коши.

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости содержатся в соответствующих методических рекомендациях Департамента анализа данных и машинного обучения.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в разделе 2. «Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний

Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
Способность использовать прикладное программное обеспечение при решении профессиональных задач (УК-4)	1. Использует основные методы и средства получения, представления, хранения и обработки данных.	Знать основы теории вероятностей и математической статистики для получения, представления, хранения и обработки данных Уметь использовать методы и средства получения, представления, хранения и обработки данных.	Для трех групп финансовых показателей 1) X_{11}, X_{12}, X_{13} ; 2) X_{21}, X_{22}, X_{23} ; 3) X_{31}, X_{32}, X_{33} найдены их значения: 1) 5, 6, 7; 2) 7, 8, 9; 3) 9, 10, 11. По данным значениям вычислите межгрупповую и среднюю групповую дисперсии. Предполагается, что: 1) все показатели независимы и нормальны с одинаковой неизвестной дисперсией $\text{Var}(X_{ij}) = \sigma^2$; 2) в каждой группе $E(X_{ij}) = \mu_i, i = 1, 2, 3$. Проверьте при уровне значимости $\alpha = 0,05$ гипотезу о совпадении ожидаемых значений показателей, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.
	2. Демонстрирует владение профессиональными пакетами прикладных программ.	Знать основные профессиональные пакеты прикладных программ для статистической обработки данных. Уметь использовать профессиональные пакеты прикладных программ для статистической обработки данных.	Пусть $X_1, X_2, \dots, X_6$ и Y_1, Y_2, Y_3 – доходности (в базисных пунктах, б.п.) финансовых инструментов X и Y . Предполагается, что $X_1, X_2, \dots, X_6$ и Y_1, Y_2, Y_3 – независимые нормальные случайные величины с неизвестными средними μ_x и μ_y и с одинаковой неизвестной дисперсией σ^2 . По конкретным значениям доходностей $x_1, \dots, x_6$ и y_1, y_2, y_3 получены выборочные средние $\bar{x} = 595, \bar{y} = 588$

			и несмещенные оценки дисперсии $s_x^2 = 81$, $s_y^2 = 51$. При уровне значимости 0,05 проверьте гипотезу $H_0: \mu_x = \mu_y$ против альтернативной гипотезы $H_1: \mu_x \neq \mu_y$.
	3. Выбирает необходимое прикладное программное обеспечение в зависимости от решаемой задачи.	Знать необходимое прикладное программное обеспечение в зависимости от решаемой задачи. Уметь использовать прикладное программное обеспечение в зависимости от решаемой задачи.	Реализация проверки гипотезы об однородности в пакете «Jupyter Notebook» и «R».
	4. Использует прикладное программное обеспечение для решения конкретных прикладных задач.	Знать прикладное программное обеспечение для решения конкретных прикладных задач статистики. Уметь использовать прикладное программное обеспечение для решения конкретных прикладных задач статистики.	Случайная величина X имеет распределение Лапласа с плотностью $f(x) = \frac{1}{2}e^{- x-\theta }$. По конкретной выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ значений X найдите методом максимального правдоподобия точечную оценку параметра θ .
Способность осуществлять поиск, критически анализировать, обобщать и систематизировать информацию, использовать системный подход	1. Четко описывает состав и структуру требуемых данных и информации, грамотно реализует процессы их сбора, обработки и интерпретации	Знать основы теории вероятностей и математической статистики для описания состава и структуры требуемых данных и информации. Уметь использовать инструменты описательной статистики и визуализации данных.	Проверить гипотезы о соответствии эмпирических данных теоретическому закону с данной функцией распределения по критерию Пирсона.
	2. Обосновывает сущность происходящего, выявляет закономерности, понимает природу вариативности	Знать основы теории вероятностей и математической статистики для обоснования происходящего, выявлять статистические закономерности для понимания природы вариативности.	Инвестор наблюдает за колебаниями котировок акций компаний A и B в течение 100 торговых дней (по закрытию торгов). В результате наблюдений получена следующая статистика: количество дней, когда обе котировки падали – 30; обе котировки росли – 27; котировки A падали, а котировки B

для решения поставленных задач (УК-10)		Уметь выявлять статистические закономерности.	при этом росли – 23; наоборот, котировки <i>A</i> росли, а котировки <i>B</i> падали – 20. При 1%-м уровне значимости проверьте гипотезу о равновероятности указанных четырех комбинаций падения и роста.
	3. Формулирует признак классификации, выделяет соответствующие ему группы однородных «объектов», идентифицирует общие свойства элементов этих групп, оценивает полноту результатов классификации, показывает прикладное назначение классификационных групп.	Знать основные критерии однородности и классификации групп. Уметь использовать статистические критерии для проверки однородности признаков.	Проверить гипотезы об однородности нескольких выборок по критериям Пирсона и Колмогорова – Смирнова.
	4. Грамотно, логично, аргументировано формирует собственные суждения и оценки. Отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок и т.д. в рассуждениях других участников деятельности.	Знать основные положения статистической обработки данных, их репрезентативность. Уметь использовать инструменты описательной статистики и визуализации данных.	Реализация вычислений эмпирических характеристик признака с использованием инструментария «<i>Jupyter Notebook</i>».

	5. Аргументированно и логично представляет свою точку зрения посредством и на основе системного описания.	Знать основы теории вероятностей и математической статистики для аргументации постановки статистических задач и дальнейшего их системного описания. Уметь использовать статистические методы для аргументации своей точки зрения	Опишите линейную модель дисперсионного анализа. Какого рода гипотезы формулируются и проверяются в этой модели?
--	---	--	---

Практико-ориентированные (ситуационные) задания

По данным, приведенным ниже, требуется проверить на 5%-ном уровне значимости, имеется ли существенное различие между доходностями $Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}$ трех акций (предполагается, что доходности акций $Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}$ распределены по нормальному закону):

$q_i^{(1)}$: -0.0724514, 0.348339, 0.214579, 0.234001, 0.080152, 0.550343, 0.695598, 0.11335, 0.311405, 0.178259, 0.707557, -0.00388785, 0.311358, 0.461806, 0.175355, 0.604575, 0.0144682, 0.164384, 0.142543, 0.593697, 0.259534, 0.264568, 0.157433, 0.491485, 0.801349, 0.00482267, 0.396828, 0.367374, 0.133619, 0.523703, -0.0413555, 0.265778, 0.390005, -0.0617123, 0.274367, 0.341692, 0.318834, 0.231129, 0.116686, 0.600259, 0.57894, 0.446113, 0.273421, 0.376668, -0.0444261, 0.438477, 0.530961, 0.108338, 0.398188, 0.942436, 0.470789, 0.352353, 0.750677, 0.559233, 0.344401, 0.209402, 0.373711, 0.381037, -0.0440512, 0.307625, 0.254757, 0.240125, 0.0755683, 0.229486, 0.022751, 0.394789, 0.405517, 0.333518, 0.422884, 0.268465, 0.406002, 0.242695, 0.390111, 0.614299, 0.468193, 0.434372, 0.173573, 0.347659, 0.0771342, 0.608834, 0.0837221, 0.347069, 0.575629, 0.437637, 0.452505, 0.311783, 0.34139, 0.173038, 0.39376, 0.0118951, 0.439373, 0.105634, 0.515845, 0.0556552, 0.299372, 0.44125, 0.534503, 0.326354, 0.305192, -0.0677661

$q_i^{(2)}$: 0.0760076, 0.276395, 0.563888, 0.459716, 0.326395, 0.25269, 0.306006, 0.389063, 0.47451, 0.465387, 0.482189, 0.233394, 0.28675, 0.013888, 0.322988,

0.0643255, 0.656926, 0.421046, 0.255888, 0.751859, 0.284468, 0.30853, 0.572919, 0.397649, 0.307229, 0.207558, 0.714226, 0.155008, 0.0934287, 0.449056, 0.48307, 0.218776, -0.0301462, 0.281453, 0.328324, 0.47907, 0.537439, 0.278841, -0.0104749, 0.542701, 0.518733, 0.417669, 0.208562, 0.654484, 0.255337, 0.149942, 0.303709, 0.20145, 0.0746767, 0.10894, -0.138775, 0.490771, 0.14104, 0.645734, 0.403321, 0.0538072, 0.630395, 0.0225026, 0.367597, 0.227261, 0.297801, 0.347481, 0.454552, 0.352614, 0.710885, 0.285879, -0.0728541, 0.191565, 0.13767, 0.0494314, 0.63165, 0.0874178, 0.473075, 0.419064, 0.356433, 0.322464, 0.390168, 0.252919, 0.750174, 0.251663, 0.631498, 0.0636435, 0.369709, 0.420973, 0.350015, 0.463658, 0.469403, 0.309336, -0.0878132, 0.491596, 0.515023, 0.505743, 0.219901, 0.578347, 0.531301, -0.152368, 0.115485, 0.615949, 0.135419, 0.407181

$q_i^{(3)}$: 0.444592, 0.712087, 0.313076, 0.645062, 0.585544, 0.474014, 0.221915, 0.276645, 0.356567, 0.409686, 0.247493, 0.506481, 0.261083, 0.496345, 0.3712, 0.105807, 0.189129, 0.322793, 0.265872, 0.208426, 0.53622, 0.480958, 0.702705, 0.602311, 0.440274, 0.524586, 0.65099, 0.163421, 0.366639, 0.258607, 0.430439, 0.37879, 0.543402, 0.468498, 0.773798, 0.280801, 0.213493, 0.349076, 0.112629, 0.00863626, -0.0988291, 0.135398, 0.589182, 0.292923, 0.592833, -0.158578, 0.378974, 0.406636, 0.240427, 0.34263, 0.0989575, 0.172111, 0.65535, 0.747777, 0.291106, 0.358112, 0.418985, 0.418883, 0.363626, 0.23119, 0.335325, 0.474778, 0.295501, 0.586975, 0.327525, 0.708025, 0.393876, 0.267684, 0.513987, 0.294231, 0.322321, 0.556567, 0.330682, 0.36469, 0.651244, 0.654846, 0.685422, 0.535121, 0.231372, 0.181668, 0.488424, 0.166, 0.00396049, 0.314943, 0.636383, 0.305025, -0.0645144, 0.322822, 0.470865, 0.426079, 0.445955, 0.545085, -0.111493, 0.523563, 0.347434, 0.422498, 0.509299, 0.329648, 0.667257, 0.264957

Примерные вопросы для подготовки к экзаменам

1. Выборочный метод. Генеральная и выборочная совокупности. Повторные и бесповторные выборки.
2. Эмпирические характеристики признака: среднее, дисперсия, СКО, асимметрия, эксцесс, функция распределения. Эмпирическая ковариация двух признаков.

3. Вариационный ряд, размах и эмпирическая медиана.
4. Генеральные и выборочные характеристики признака.
5. Математическое ожидание и дисперсия выборочного среднего.
6. Ковариация выборочных средних двух признаков.
7. Математическое ожидание и дисперсия выборочной доли.
8. Среднее арифметическое и дисперсия совокупности, разбитой на группы.
9. Среднее арифметическое и дисперсия интервального распределения. Связь с характеристиками исходной совокупности. Поправка Шеппарда.
10. Разложение в ряд по центральным моментам среднего арифметического функции от эмпирических значений. Распределение порядковых статистик.
11. Точечная статистическая оценка. Несмещенность, эффективность, состоятельность.
12. Состоятельность и сходимость по вероятности.
13. Несмещенная оценка начального момента произвольного порядка.
14. Выборочное среднее как эффективная оценка математического ожидания.
15. Достаточные условия состоятельности статистической оценки.
16. Состоятельные оценки начальных моментов. Несмещенная оценка генеральной дисперсии и ее состоятельность.
17. Оценки параметров распределения методом моментов и их состоятельность.
18. Метод максимального правдоподобия.
19. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера. Определения и простейшие их свойства.
20. Медиана и другие квантили непрерывных распределений.
21. Интервальные оценки параметров распределения, доверительная вероятность и точность оценки. Общая схема построения интервальных оценок.
22. Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии.
23. Доверительные интервалы для математического ожидания и вероятности события в случае выборки большого объема.

24. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии.
25. Доверительный интервал (симметричный по вероятности) для дисперсии при известном математическом ожидании.
26. Доверительный интервал (симметричный по вероятности) для дисперсии при неизвестном математическом ожидании.
27. Интервал предсказания.
28. Проверка статистических гипотез. Критическая область. Мощность критерия.
29. Отношение правдоподобия и лемма Неймана-Пирсона.
30. Пример построения наиболее мощного критерия.
31. Проверка гипотез об определенных значениях параметров нормальных распределений.
32. Проверка гипотезы о равенстве средних при известной дисперсии.
33. Проверка гипотезы о равенстве средних при неизвестной дисперсии.
34. Р-значение критерия. Определение и способ его вычисления.
35. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий.
36. Проверка гипотезы о соответствии эмпирических данных теоретическому закону с данной функцией распределения по критерию Пирсона.
37. Проверка гипотезы об однородности нескольких выборок по критериям Пирсона и Колмогорова – Смирнова.
38. Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа.
39. Решение СЛУ методом наименьших квадратов.
40. Общая дисперсия как сумма факторной и остаточной дисперсии.
41. Коэффициент детерминации R^2 и его связь с коэффициентом корреляции
42. Линейная модель парной регрессии и теорема Гаусса – Маркова.
43. Несмещенность МНК-оценок коэффициентов парной регрессии.

Примеры экзаменационных билетов

Экзаменационный билет №

1. (10 баллов) Запишите формулы для математического ожидания и дисперсии выборочного среднего в случае повторной (бесповторной) выборки. Поясните все используемые обозначения.
2. (10 баллов) Какие выборки называются однородными? Сформулируйте критерий Пирсона по проверке с заданным уровнем значимости гипотезы об однородности нескольких выборок.
3. (10 баллов) Значение $X(k)$ финансового показателя X задано на множестве компаний $\Omega = 1, 2, \dots, 10$ следующей таблицей

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X(k)$	3	2	3	3	1	2	3	2	3	3

Из Ω случайным образом отбираются 5 компаний (возможно, с повторениями). Найдите математическое ожидание и дисперсию среднего значения $\bar{X}$ показателя X на совокупности отобранных компаний (для повторно обобранных компаний среднее значение показателя учитывается столько раз, сколько раз компания была выбрана).

4. В результате проведенного социологического опроса $n = 1350$ человек рейтинг кандидата в президенты составил 8%. Найдите доверительный интервал для рейтинга кандидата с гарантированной надежностью 95%.

5. (10 баллов) Пусть $X_1, X_2, \dots, X_6$ и Y_1, Y_2, Y_3 – доходности (в базисных пунктах, б.п.) финансовых инструментов X и Y . Предполагается, что $X_1, X_2, \dots, X_6$ и Y_1, Y_2, Y_3 – независимые нормальные случайные величины с неизвестными средними μ_x и μ_y и с одинаковой неизвестной дисперсией σ^2 . По конкретным значениям доходностей $x_1, \dots, x_6$ и y_1, y_2, y_3 получены выборочные средние $\bar{x} = 595$, $\bar{y} = 588$ и несмещенные оценки дисперсии $s_x^2 = 81$, $s_y^2 = 51$. При уровне значимости 0,05 проверьте гипотезу $H_0: \mu_x = \mu_y$ против альтернативной гипотезы $H_1: \mu_x \neq \mu_y$.

6. (10 баллов) Инвестор наблюдает за колебаниями котировок акций компаний A и B в течение 100 торговых дней (по закрытию торгов). В результате наблюдений получена следующая статистика: количество дней, когда обе котировки падали – 30; обе котировки росли – 27; котировки A падали, а котировки B при этом росли – 23; наоборот, котировки A росли, а котировки B падали – 20. При 1%-м уровне значимости проверьте гипотезу о равновероятности указанных четырех комбинаций падения и роста.

Экзаменационный билет №

1. (10 баллов) Как производится оценка параметров абсолютно непрерывного распределения методом максимального правдоподобия? Какой вероятностный смысл в этом случае имеет функция правдоподобия? Приведите пример функции правдоподобия для параметра непрерывного распределения.
2. (10 баллов) Опишите линейную модель дисперсионного анализа. Какого рода гипотезы формулируются и проверяются в этой модели?
3. (10 баллов) Пусть $X_1, X_2, \dots, X_{11}$ – выборка из равномерного распределения на отрезке $[6; 14]$, $\hat{F}(x)$ – соответствующая выборочная функция распределения. Найдите $P(\hat{F}(9) = \hat{F}(12))$.
4. (10 баллов) Случайная величина X имеет распределение Лапласа с плотностью $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$. По конкретной выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ значений X найдите методом максимального правдоподобия точечную оценку параметра θ .
5. (10 баллов) Пусть $X_1, X_2, \dots, X_7$ и $Y_1, Y_2, \dots, Y_{11}$ – доходности (в базисных пунктах, б.п.) финансовых инструментов X и Y . Предполагается, что $X_1, X_2, \dots, X_7$ и $Y_1, Y_2, \dots, Y_{11}$ – независимые и нормальные случайные величины с неизвестными средними μ_x и μ_y и с неизвестными дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2 . По конкретным значениям доходностей $x_1, \dots, x_7$ и $y_1, y_2, \dots, y_{11}$ получены несмещенные оценки дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 : $s_x^2 = 80$, $s_y^2 = 20$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверьте гипотезу $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ против альтернативной гипотезы $H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.
6. (10 баллов) Для трех групп финансовых показателей 1) X_{11}, X_{12}, X_{13} ; 2) X_{21}, X_{22}, X_{23} ; 3) X_{31}, X_{32}, X_{33} найдены их значения:

1) 5, 6, 7; 2) 7, 8, 9; 3) 9, 10, 11. По данным значениям вычислите межгрупповую и среднюю групповую дисперсии. Предполагается, что: 1) все показатели независимы и нормальны с одинаковой неизвестной дисперсией $\text{Var}(X_{ij}) = \sigma^2$; 2) в каждой группе $E(X_{ij}) = \mu_i, i = 1, 2, 3$. Проверьте при уровне значимости $\alpha = 0,05$ гипотезу о совпадении ожидаемых значений показателей, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная

8.1. Соловьев, В. И. Анализ данных в экономике: теория вероятностей, прикладная статистика, обработка и визуализация данных в Microsoft Excel: учебник для направления бакалавриата "Экономика и управление" / В. И. Соловьев; Финуниверситет. - Москва: Кнорус, 2019. - 498 с. - Текст : непосредственный. - То же. - 2021. - ЭБС BOOK.ru. - URL: <https://book.ru/book/938856> (дата обращения: 11.01.2022). - Текст : электронный.

8.2. Сборник задач по курсу "Математика в экономике". В 3 ч. Ч. 3: Теория вероятностей: учебное пособие для студ., обуч. по спец. "Бух. учет, анализ и аудит", "Финансы и кредит", "Налоги и налогообложение" и "Мировая экономика" / А. В. Браилов, А. С. Солодовников; под ред. В. А. Бабайцева, В. Б. Гисина. - Москва: Финансы и статистика, 2013, 2017. - 125 с. - Текст : непосредственный.

б) дополнительная:

8.3. Солодовников, А. С. Математика в экономике. Теория вероятностей и математическая статистика: В 3 ч. Ч. 3: учебник для студ. экономич. спец. вузов / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. - Москва: Финансы и статистика, 2008. - 463 с. - Текст : непосредственный.

8.4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие - Москва : Юрайт, 2011 - 479с. - Текст: непосредственный. - То же. - 2022. - ЭБС Юрайт. - URL: <https://urait.ru/bcode/488573> (дата обращения: 11.01.2022).. - Текст : электронный.

8.5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: учебное пособие / под ред. А. А. Свешникова - Санкт-Петербург : Лань, 2013. - 446 с. - Текст : непосредственный. - То же. – 2021. - ЭБС Лань. - URL: <https://e.lanbook.com/book/168507> (дата обращения: 11.01.2022). - Текст : электронный.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

9.1. Информационно-образовательный портал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. <http://portal.ufrf.ru/>.

9.2. Сайт департамента анализа данных и машинного обучения
<http://www.fa.ru/org/dep/findata/Pages/Home.aspx>

9.3. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ)
<http://elib.fa.ru/>

9.4. Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>

9.5. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека ОНЛАЙН» <http://biblioclub.ru/>

9.6. Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znanium.com>

9.7. Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ»
<https://www.biblio-online.ru/>

9.8. Электронно-библиотечная система издательства «Лань»
<https://e.lanbook.com/>

9.9. Деловая онлайн-библиотека Alpina Digital <http://lib.alpinadigital.ru/>

9.10. Научная электронная библиотека eLibrary.ru <http://elibrary.ru>

9.11. Проект департамента Матричный калькулятор «MatCalc»
<https://matcalc.ru/>

9.12. Браилов А.В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник-практикум/ А.В. Браилов [и др.]. - Ижевск: Издательство «ИКИ», 2016. - 414 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/69368.html>.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Самостоятельная работа студентов проходит в компьютерных классах. Организации самостоятельной работы служит календарно-тематический план изучения дисциплины. В этом плане указана тематика лекций и практических занятий. Практические занятия проходят, как правило, в интерактивной форме. Интерактивная форма – решение лабораторных (практических) работ по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) с использованием инструментария «*Jupyter Notebook*», «*R*».

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем

10.1. Комплект лицензионного программного обеспечения:

10.1.1. *Windows, Microsoft Office, Wolfram Mathematica, MATLAB*

10.1.2. *Антивирус ESET Endpoint Security*

10.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

10.2.1. Информационно-правовая система «Консультант Плюс».

10.2.2. Информационно-правовая система «Гарант».

11.2.3. Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>

11.2.4. Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» - <http://www.skrin.ru/>

10.3. Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации - не предусмотрены.

10.4. Эконометрический пакет «R» и интерфейс «RStudio».

10.5. Библиотеки *Python* для организации работы в «*Jupyter Notebook*».

10.6. Приложения с использованием «*Wolfram Mathematica*» <https://demonstrations.wolfram.com/>

10.7. Программа «*MatCalc*» <https://matcalc.ru/>

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Компьютерный класс, оснащённый системой динамического проецирования. Для освоения дисциплины необходим компьютер. При этом возможно использование компьютеров в компьютерных классах университета.

Все изучаемые технологии доступны на личных компьютерах студентов.